

FUNÇÕES – DOMINIO E IMAGEM

Cálculo com Geometria Analítica

FUNÇÕES

Os valores de uma variável freqüentemente dependem dos valores de outra variável.

- ▶ A temperatura de ebulição da água depende da altitude (o ponto de ebulição diminui quando a altitude aumenta).

O ponto de ebulição da água, e , depende da altitude, a

Dizemos que e é a variável dependente e a variável a é a variável independente.



FUNÇÕES

Os valores de uma variável freqüentemente dependem dos valores de outra variável.

- ▶ O Rendimento mensal de suas economias depende da taxa de juros oferecida pelo Banco.

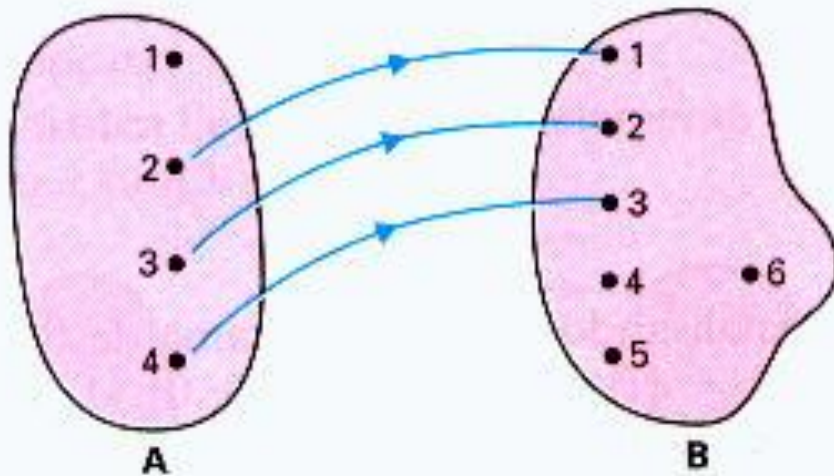
O Rendimento, r , depende da taxa de juros, t

Dizemos que r é a variável dependente e a variável t é a variável independente.



FUNÇÕES – CONCEITO

- ▶ Toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a **todo** elemento do primeiro conjunto **um único** elemento do segundo, ocorre uma função.



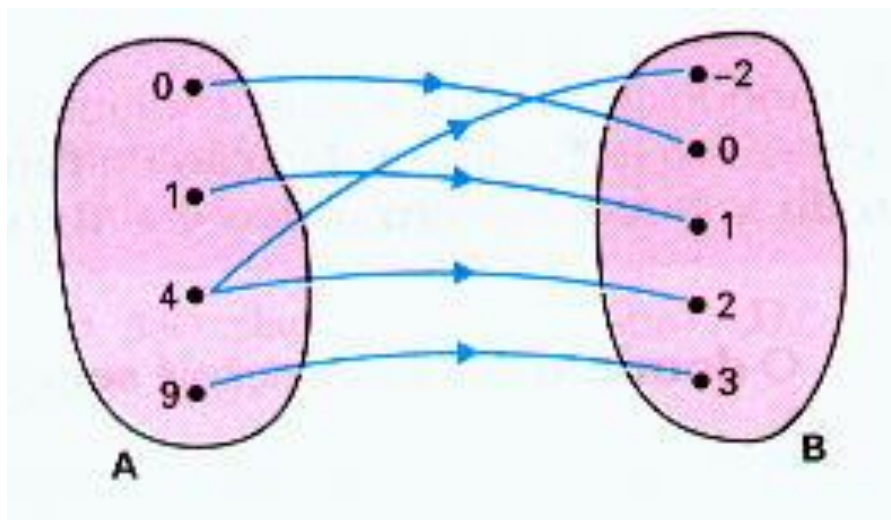
O diagrama representa uma função ?



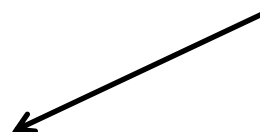
Não, pois existe o elemento 1 no conjunto A, que não está associado a nenhum elemento do conjunto B.

FUNÇÕES – CONCEITO

- ▶ Toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a **todo** elemento do primeiro conjunto **um único** elemento do segundo, ocorre uma função.



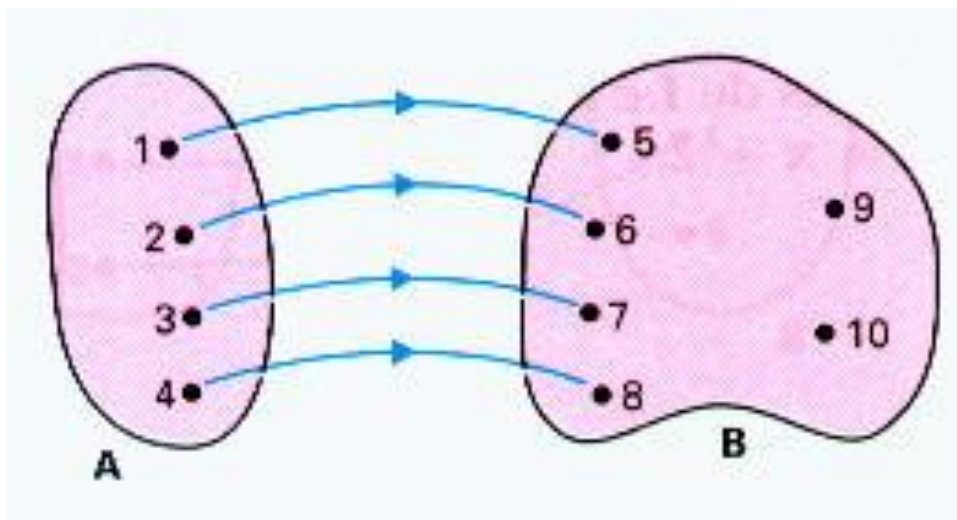
O diagrama representa uma função ?



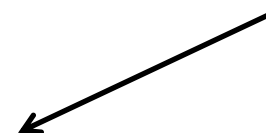
Não, pois existe o elemento 4 no conjunto A, que está associado a mais de um elemento do conjunto B.

FUNÇÕES – CONCEITO

- ▶ Toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a **todo** elemento do primeiro conjunto **um único** elemento do segundo, ocorre uma função.



O diagrama representa uma função ?



Sim, pois todo elemento do conjunto A, está associado a **somente um** elemento do conjunto B.

FUNÇÕES – CONCEITO

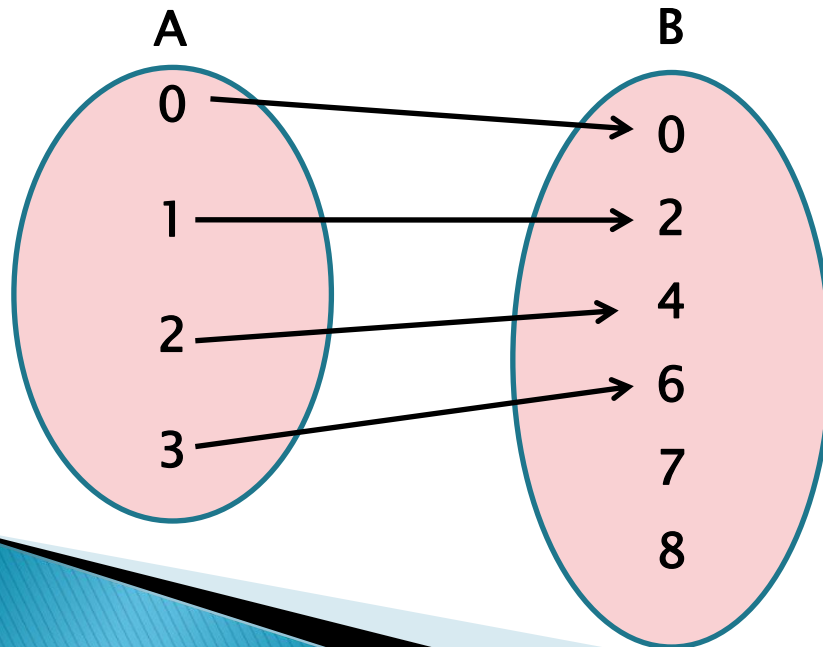
De um modo geral, dados dois conjuntos **A** e **B**, e uma relação entre eles, dizemos que essa relação é uma **função de A em B** se e somente se, **para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$** de modo que x se relacione com y .



FUNÇÕES – Exemplo

Considere os conjuntos:

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$. Vamos associar cada elemento do conjunto A com o seu dobro em B. Represente esta função através de um diagrama.



O domínio da função é
 $D(f) = \{0, 1, 2, 3\}$

O contradomínio da função é
 $CD(f) = \{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$

A Imagem da função é
 $I(f) = \{0, 2, 4, 6\}$

FUNÇÕES

NOTAÇÃO:

Leonhard Euler inventou um símbolo para dizer “ y é uma função de x ”: $y=f(x)$.

Considerando x como elemento do conjunto A e y como um elemento do conjunto B , a lei matemática que representa a função do exemplo é

$f: A \rightarrow B$, tal que $y=2.x$ ou $f(x)=2.x$
(onde y é a variável dependente e x é a variável independente)

FUNÇÕES

NOTAÇÃO– Exemplo

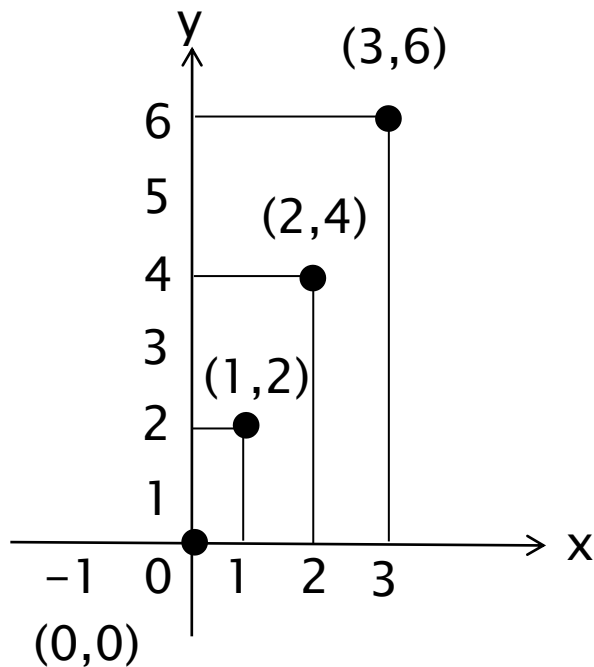
- ▶ O ponto de ebulição da água é uma função da altitude, $e = f(a)$
- ▶ A área de um círculo é uma função do seu raio, $A = f(r)$ $A = \pi.r^2$
- ▶ O volume de uma esfera como uma função do seu raio, $V=f(r)$ $V= 4/3.\pi.r^3$



REPRESENTAÇÃO CARTESIANA DE UMA FUNÇÃO

► Exemplo:

$f:\{0,1,2,3\} \rightarrow \{0,2,4,6,7,8\}$ tal que $y=2.x$ ou $f(x)=2.x$

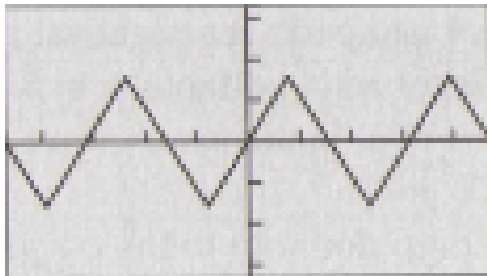


x	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6

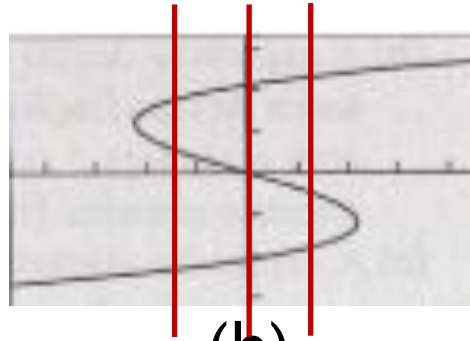
Podemos visualizar os valores do domínio sobre o eixo horizontal x, como também os valores da imagem sobre o eixo vertical y.

REPRESENTAÇÃO CARTESIANA DE UMA FUNÇÃO

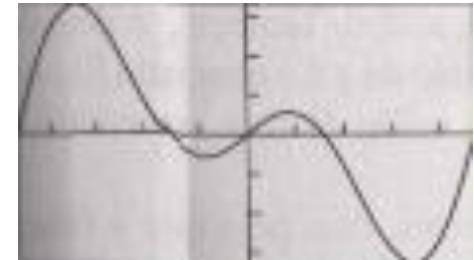
► Verificação se é ou não uma função



(a)



(b)



(c)

Um destes gráficos não é uma função.

R: (b) existe três pontos no gráfico com coordenada $x = 0$, de modo que não existe um único valor de y para esse valor $x=0$.

Teste da linha vertical

Um gráfico no plano cartesiano define y como uma função de x se e somente se nenhuma linha vertical cruza o gráfico em mais de um ponto.

CÁLCULO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

- ▶ Para determinar o intervalo de valores de x que definem uma função, é necessário atender algumas exigências as mais comuns são:
- Denominadores tem que ser $\neq 0$
- Radicandos de índice par tem que ser ≥ 0

Exemplos: Determine o domínio das seguintes funções:

$$a) \quad y = \sqrt{4 - x} \qquad b) \quad y = \frac{1}{x - 4}$$



CÁLCULO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

$$a) \quad y = \sqrt{4 - x}$$

$$4 - x \geq 0$$

$$-x \geq -4 \quad .(-1)$$

$$x \leq 4$$

$$D = (x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4) \quad \text{ou} \quad D : (-\infty, 4]$$



CÁLCULO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

$$b) \quad y = \frac{1}{x - 4}$$

$$x - 4 \neq 0$$

$$x \neq 4$$

$$D = (x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4) \quad \text{ou} \quad D : (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$



EXEMPLOS

1. Considere a função $f(x)=3x + 4$

a) Domínio de $f(x)$

$D(f) = \mathbb{R}$, pois x pode assumir qualquer valor em $\mathbb{R}$.

b) $f(1)$

$$f(1) = 3.(1) + 4$$

$$f(1) = 3 + 4$$

$$f(1) = 7, \text{ logo a imagem é igual a } 7$$



EXEMPLOS

1. Considere a função $f(x)=3x + 4$

c) $f(0)$

$$f(0) = 3.(0) + 4$$

$$f(0) = 0 + 4$$

$f(0) = 4$, logo a imagem é igual a 4

d) $f(-1)$

$$f(-1) = 3.(-1) + 4$$

$$f(-1) = -3 + 4$$

$f(-1) = 1$, logo a imagem é igual a 1



EXEMPLOS

2. Considere a função $f(x)=x^2$, calcule $f(x + h)$

a) $f(x + h)$

$$f(x + h) = (x + h)^2$$

$$f(x + h) = x^2 + 2.x.h + h^2$$

b) $f(x + 3) - f(x)$

$$f(x + 3) - f(x) = (x + 3)^2 - x^2$$

$$f(x + 3) - f(x) = x^2 + 2.x.3 + 3^2 - x^2$$

$$f(x + 3) - f(x) = x^2 + 6.x + 9 - x^2$$

$$f(x + 3) - f(x) = 6x + 9$$